Massachusetts Teknoloji Enstitüsü-Fizik Bölümü

Fizik – 8.01 **Ödev # 4** **Güz, 1999**

ÇÖZÜMLER

Dru Renner

Bu çözümler boyunca, aşağıdaki sembol oldukça sık kullanılacaktır.

n **rastgele bir tamsayıyı:** $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ **temsil edecektir.**

Problem 4.1

$$\upsilon_{limit} << \upsilon_{krit}$$

olduğu zaman bölge I deyiz. Bundan dolayı

$$\frac{mg}{C_1 r} << \frac{C_1}{C_2 r}$$

Olduğu zaman

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{yag}$$

Böylece

$$r^3 << \frac{3C_1^{\ 2}}{4\pi C_2 \rho_{yag} g} \approx 4 \times 10^{-12}$$

$$r << 1.6 \times 10^{-4}\,\text{m} \approx 160 \text{ mikron}$$

Olur.

Problem 4.2

(a) Sadece iki kuvvet vardır: $mg\hat{y}$ ağırlığı, ve $-C_1 r\vec{v}$ direnç kuvveti (aşağı doğru dikey yön y olarak seçilmiştir). Newton'un ikinci kanunu

$$m\,\vec{a} = m\frac{d^2R}{dt^2} = mg\,\hat{y} - C_1 r\,\vec{v} = mg\,\hat{y} - C_1 r\frac{d\vec{R}}{dt}$$

Verir. Burada $\vec{R}$ zamanın fonksiyonu olarak konum vektörüdür. x ve y yönündeki hareket için diferansiyel denklemler yukarıdaki vektör eşitliğinin x ve y bilenlerini alarak bulunur. x yönündeki hareket için diferansiyel denklem

$$m\ddot{x} = -C_1 r\dot{x}$$

Şeklindedir ve y yönündeki hareket için diferansiyel denklem

$$m\ddot{y} = mg - C_1 r\dot{y}$$

Şeklindedir.

(b) x yönündeki hareket için diferansiyel denklem

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{C_1 r}{m} v_x$$

Şeklinde yazılabilir. Burada $v_x = \frac{dx}{dt}$ dir. τ yu

$$\tau = \frac{m}{rC_1}$$

Şeklinde tanımlarsak, bu durumda denklem

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\tau} v_x$$

Şeklini alır. Bu denklem aşağıdaki adımlar takip edilerek çözülebilir.

$$\ln v_x - \ln u = \int_0^t \frac{dv_x}{v_x} = \int_0^t -\frac{dt}{\tau} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\ln v_x = -\frac{t}{\tau} + \ln u$$

$$v_x = e^{\ln v_x} = e^{-\frac{t}{r} + \ln u} = ue^{-\frac{t}{r}}$$

Bundan dolayı

$$v_x = ue^{-\frac{t}{r}}$$

Şeklinde verilir.

(c) y yönündeki hareket için diferansiyel denklem

$$\frac{dv_y}{dt} = g - \frac{C_1 r}{m} v_y$$

Şeklinde yazılabilir. Burada $v_y = \frac{dy}{dt}$ dir. Yine τ yu kullanırsak denklem,

$$\frac{dv_y}{dt} = g - \frac{1}{\tau} v_y$$

Şeklini alır. Bu denklem aşağıdaki adımlar takip edilerek çözülebilir. İlk olarak ara bir f niceliği tanımlıyoruz.

$$g - \frac{1}{\tau} v_y = \frac{1}{\tau} f \quad \Rightarrow \quad f = -g\tau + v_y$$

Bu durumda

$$\frac{df}{dt} = \frac{d(-g\tau + v_y)}{dt} = \frac{dv_y}{dt} = g - \frac{1}{\tau} v_y = \frac{1}{\tau} f$$

Olur ve

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{\tau} f$$

Denkleminin elde edilmesini sağlar. Bu denklemi çözmek için bu adımlar takip edilir.

$$\frac{df}{f} = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\ln f - \ln f_0 = \int_0^t \frac{df}{f} = \int_0^t -\frac{dt}{\tau} = -\frac{t}{\tau}$$

$$\ln f = -\frac{t}{\tau} + \ln f_0$$

$$f = e^{\ln f} = e^{-\frac{t}{r} + \ln f_0} = f_0 e^{-\frac{t}{r}}$$

Bu durumda

$$-g\tau + v_y = f = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = (-g\tau + v_{y0}) e^{-\frac{t}{\tau}} = -g\tau e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Bundan dolayı

$$v_y = g\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Şeklinde verilir.

(d) v_y için denklem

$$v_y = g\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Şeklindedir.

$$t \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad v_y \to g\tau$$

Olacağını görürüz. Böylece limit hız $g\tau = \dfrac{mg}{rC_1}$ şeklinde olur. Bu durumda $v_y = 0.99.g\tau$ için

$$0.99.g\tau = g\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$0.99 = g\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 0.01$$
$$t = -\ln(0.01).\tau$$
$$t \approx 4.6.\tau$$

Böylece, $t \approx 4.6 \cdot \tau$ için, hız, limit hızın halihazırda %99 dur.

Karo Mısır şurubu için, C_1 değeri oda sıcaklığında yaklaşık olarak $1.6x10^2\,(kg/m)/s$ dir, ve sıcaklığa son derece bağımlıdır. Derste deney yaptığımız zaman %10 farklı olabilir (Lütfen 6 Ekim Çarşamba günü anlatılan #12 nolu derse bu dersin web sayfasında bakınız).

¼ inç ($r = 1/8\text{inç} \approx 3.18x10^{-3}\ m$) çapındaki çelik rulman bilyesinin kütlesi yaklaşık 1.0 gramdır. (Bu çelik rulman bilyesinin yoğunluğu yaklaşık $7.8x10^3\ kg/m^3$ tür. Lütfen 8.01 dersinin web sayfasına bakınız.)

Böylece derste yapılan deney için τ yaklaşık 2 ms dir.

$$\tau = \frac{1.0\,\mathrm{x}10^{-3}\,\mathrm{kg}}{3.18\,\mathrm{x}10^{-3}\cdot 1.6\,\mathrm{x}10^{2}} \approx 2.0\,\mathrm{x}10^{-3}\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{ms}$$

Eğer 4.6τ kadar (yaklaşık 9ms) beklerseniz, halihazırda aşağıda değerleri verilen ¼ inç çapındaki çelik rulman bilyesinin limit hızın %99 una ulaşmışsınızdır. Ayrıca saat 10:00 dersinde elde edilen sonuçları (iki ölçüm) da PIVoT da bulabilirsiniz.

Ders Saati	4.0 cm yi Düşme Zamanı	Ortalama Hız
10:00	1.68 ± 0.2 s	2.4 ± 0.3 cm/s
10:00	1.40 ± 0.2 s	2.9 ± 0.3 cm/s
11:00	1.75 ± 0.2 s	2.3 ± 0.3 cm/s

Saat 10:00 daki derste ortalaması 2.7 ± 0.3 cm/s olan iki ölçüm yapıldı. Ve saat 11:00 deki derste değeri 2.3 ± 0.3 cm/s olan tek ölçüm yapıldı. Limit hızın $\frac{mg}{rC_1}$ şeklindedir ve bunun değeri yaklaşık 2.0 cm/s dir (C_1 deki verilen büyük belirsizliğe göre çok kötü değil).

(e) $t \to \infty$ için yatay hız $v_x \to 0$ ve düşey hız $v_y \to \frac{mg}{rC_1}$ olur.

Problem 4.3 (Ohanian, sayfa 405, problem 1)

(a) Hareketin periyodu $\tau = 1.2\,\mathrm{s}$ olarak veriliyor. Bundan dolayı, frekans

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{1.2s} \approx 0.83Hz$$

Ve açısal frekans

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{1.2s} \approx 5.2\,rad/s$$

Şeklindedir.

(b) Basit harmonik hareket için, genlik toplam hareketin altüst sınırın yarısıdır. Bu durumda, pozitif olarak alıyoruz, genlik,

$$A = \frac{1}{2}\left|0.20m - (-0.20m)\right| = 0.20m$$

Şeklindedir.

(c) Hareketin basit harmonik hareket olduğu bizlere verilmiştir. Böylece bizler *t* nin fonksiyonu olarak *x* i biliyoruz.

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

Burada δ faz açısıdır. Ve bizler ayrıca *t=0* olduğu zaman *x=0* olduğunu da biliyoruz. Bu durumda eşitlik,

$$0 = A\cos(\omega 0 + \delta) = A\cos(\delta) \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\pi}{2} + n2\pi \text{ yada } \delta = -\frac{\pi}{2} + n2\pi$$

Olur. (2π çarpanını ihmal edersek) İki mümkün çözüm $\delta = \frac{\pi}{2}$ ve $\delta = -\frac{\pi}{2}$ dir. Hangi çözümün doğru olduğuna karar vermek için, hızı incelememiz gerekir.

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \delta)$$

t=0 da hızın pozitif olduğu bizlere verilmiştir. Bundan dolayı

$$v = \omega A\sin\delta > 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = -\frac{\pi}{2}$$

Şeklindedir.

(d) Yukaridaki değerleri kullanarak

$$x = 0.2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Elde ederiz. Hangi zamanın $x = 0.20m$ ye karşılık geldiğini dikkate almak zorundayız.

$$x = 0.2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 0.2 \quad \Rightarrow$$

$$\cos\left(wt - \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\omega t - \frac{\pi}{2} = 2n\pi$$

$$t = \frac{1}{w}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

$$t = \frac{\tau}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

$$t = \frac{\tau}{4} + n\tau$$

olur. Parçacık $x = 0.20m$ ye ilk defa

$$t = \frac{\tau}{4} = \frac{1.2s}{4} = 0.30s$$

De varır. Şimdi $x = -0.10m$ ye hangi *t* zamanın karşı geldiğini bulmamız gerekir.

$$x = 0.2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -0.1$$

$$\Rightarrow \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\omega t - \frac{\pi}{2} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$$

$$t = \frac{1}{\omega}\left(\pm\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

$$t = \frac{\tau}{2\pi}\left(\pm\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

$$t = \tau\left(\frac{1}{4} \pm \frac{1}{3}\right) + n\tau$$

Parçacık $x = -0.10m$ ye ilk defa

$$t = \frac{7\tau}{12} = \frac{7 \times 1.2s}{12} = 0.70s$$

Zamanında varır.

(e) Sürat (basit harmonik hareket için yönden bağımsızdır)

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = \left|A\omega\sin(\omega t + \delta)\right|$$

Şeklinde verilir. *t=0* anı *x=0* a karşılık gelmektedir.

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = A\omega\left|\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| = A\omega = \frac{2\omega A}{\tau} = \frac{2\pi \times 0.20m}{1.2s} \approx 1.0\,m/s$$

$x = -0.10m$ noktası $t = \frac{7\tau}{12}$ ye karşılık gelmektedir. Böylece,

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = A\omega\left|\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}A\omega}{2} = \frac{\sqrt{3}\times\pi\times 0.20m}{\tau} = \frac{\sqrt{3}\pi\times 0.20m}{1.2s} \approx 0.91m/s$$

Olur.

Problem 4.4 (Ohanian, sayfa 405, problem 4)

Bizlere parçacığın konumunun zamanın fonksiyonu olarak

$$x = 3.0\text{m} \times \cos(2.0\,\text{rad/s} \cdot t + \frac{\pi}{3})$$

Şeklinde verildiğini biliyoruz.

(a) Hareket basit harmonik harekettir. Yukarıdaki klasik formu kıyaslayabiliriz.

$$x = |A\cos(\omega t + \delta)|$$

Bundan

$$A = 3.0\text{m}$$

$$\omega = 2.0\,\text{rad/s}$$

$$\upsilon = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2.0\,\text{rad/s}}{2\pi} \approx 0.32\text{Hz}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2.0\,\text{rad/s}} \approx 3.1\text{s}$$

Olduğunu çıkarabiliriz. Ayrıca

$$\delta = \frac{\pi}{3}$$

olduğunu da belirleyebiliriz.

(b) Denge noktası *x=0* noktasına karşılık gelmektedir. *x=0* olan bütün zamanları bulmak için hareket denklemini kullanabiliriz.

$$x = A\cos(\omega t + \delta) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\cos(wt + \delta) = 0$$

$$\omega t + \delta = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - \delta\right)$$

$$t = \frac{\tau}{2\pi}\left(\frac{\pi}{6} + n\pi\right)$$

$$t = \frac{\tau}{12} + \frac{n\tau}{2}$$

En enken pozitif zaman

$$t = \frac{\tau}{12} = \frac{2\pi}{12\omega} = \frac{\pi}{6 \cdot 2.0\,\text{rad/s}} \approx 0.26\text{s}$$

Dir. Dönme noktaları $x = \pm A$ ya karşılık gelen noktalardır. $x = \pm A$ olan bütün zamanları bulmak için hareket denklemini kullanabiliriz

$$x = A\cos(\omega t + \delta) = \pm A \quad \Rightarrow$$

$$\cos(wt + \delta) = \pm 1$$

$$\omega t + \delta = n\pi$$

$$t = \frac{1}{\omega}(n\pi - \delta)$$

$$t = \frac{\tau}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{3} + n\pi\right)$$

$$t = -\frac{\tau}{6} + \frac{n\tau}{2}$$

En enken pozitif zaman

$$t = -\frac{\tau}{6} + \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{3} = \frac{2\omega}{3} = \frac{2\pi}{6 \times 2.0\,\text{rad/s}} \approx 1.0\text{s}$$

Dir.

(c) $x = 0$ ve $x = \pm A$ için bütün zamanlar yukarıda verilmiştir.

$x = 0$ noktalarında $t = \frac{\tau}{12} + \frac{n\tau}{2}$

Ve

$x = \pm A$ noktalarında $t = -\frac{\tau}{6} + \frac{n\tau}{2}$

Şeklindedir. $\frac{n\tau}{2}$ kısmı, parçacığın ta olarak $\frac{\tau}{2}$ zaman aralıkları ile dönme noktalarından yada denge konumundan geçeceğini belirtir. Fakat dikkatli olmalıyız. İki tane dönme noktası vardır. Yukarıdaki zamanın yarısı $x = +A$'ya ve yarısı ise $x=-A$ 'yakarşılık gelmektedir. $-\frac{\tau}{6}$ zamanı $x=+A$'ya karşılık gelmektedir. Böylece $x=+A$ için mümkün olan zaman değerleri

$$t=-\frac{\tau}{6}+n\tau$$

Şeklinde ve $x=-A$ için mümkün olan zaman değerleri ise

$$t=-\frac{\tau}{6}+\frac{\tau}{2}+n\tau=\frac{\tau}{3}+n\tau$$

Şeklindedir.

Problem 4.5

(a) Hareket basit harmonik harekettir. Bundan dolayı, zamanın fonksiyonu olarak konum

$$x=A\cos(\omega t+\delta)$$

Şeklindedir. Ve zamanın fonksiyonu olarak hız

$$\upsilon=-\omega A\sin(\omega t+\delta)$$

Şeklindedir. Ve açısal frekans

$$\omega=\frac{2\pi}{\tau}=\frac{2\pi}{0.4}\approx 15.7\,\mathrm{rad/s}$$

Şeklinde verilir. Eğer biz x için yönü başlangıçtaki ilk yer değiştirme yönü ile aynı olarak seçersek, Bu durumda denge konumundan başlangıç ($t=0$) yer değiştirmesi

$x=0.1\mathrm{m}$ dir. Böylece,

$$0.1=A\cos\delta \qquad (1)$$

Başlangıç hızı ($t=0$), $v=-3\,\mathrm{m/s}$ dir. (yönü, denge konumundan pozitif yöne doğrudur). Böylece

$$-3=-\omega A\sin\delta \qquad (2)$$

Eşitlik (1) ve (2) kullanarak, δ' yı bulabiliriz.

$$\tan\delta=\frac{\sin\delta}{\cos\delta}=\frac{3}{0.1\omega}=\frac{3\tau}{0.1\cdot 2\pi}$$

Buradan,

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{3\cdot\tau}{0.1\cdot 2\pi}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3\cdot 0.4}{0.1\cdot 2\pi}\right) \approx 1.088$$

($\delta = 1.088 + 2n\pi$ bütün değerler için sağlayacağını unutmayın.) Bu durumda (1) nolu eşitliği kullanarak

$$A = \frac{0.1}{\cos\delta} \approx 0.216\text{m}$$

Şeklinde elde edilir. Bu durumda hareketin denklemi

$$x = 0.216\cdot\cos(15.7t + 1.088)$$

İle verilir.

(b) Denge konumu $x = 0$ a karşılık gelmektedir.

$$x = A\cos(\omega t + 1.088) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\omega t + 1.088 = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - 1.088\right)$$

$$t = -\frac{\tau}{2\pi} + (0.48 + n\pi)$$

$$t = 7.7\times10^{-2}\cdot\tau + \frac{n\tau}{2}$$

Olur. Kütle ilk olarak denge konumundan

$t = 7.7\times10^{-2}\cdot\tau = 3.1\times10^{-2}\text{s}$ de

Geçecektir. Toplam enerji korunur

$$E = K + U$$

Burada

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ ve } U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{m\omega^2x^2}{2} = \frac{2m\pi^2}{\tau^2}x^2$$

Şeklindedir. $t = 0$ da enerji,

$$U = \frac{1}{2}kx_0^{\ 2} = \frac{2\pi^2 m}{\tau^2}x_0^2 = \frac{1}{2}m\cdot(3)^2 + \frac{2m\pi^2}{\tau^2}\cdot(0.1)^2 \approx 17.2J$$

Şeklinde verilir. Enerjinin korunumundan dolayı bu enerji, diğer herhangi bir zamandaki toplam enerjiye eşittir.

Denge konumunda $x = 0$, ve potansiyel enerji

$$U = \frac{1}{2}k(0)^2 = 0$$

Bundan dolayı, şimdi toplam enerji sadece kinetik enerjiden ibarettir.

$$E = K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad |v| = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

Böylece kinetik enerji

$$K = E \approx 17.2J$$

Olur. Ve hız

$$|v| = \sqrt{\frac{2E}{m}} \approx 3.4\, m/s$$

Ve $x = 0$ da ivme,

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

Şeklinde elde edilir.

Dönme noktaları $x = \pm A$ noktalarına ve aynı zamanda bu noktalar $v = 0$ anlarına karşılık gelir.

$$v = -\omega A \sin(\omega t + 1.088) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sin(\omega t + 1.088) = 0$$

$$\omega t + 1.088 = n\pi$$

$$t = \frac{1}{\omega}(n\pi - 1.088)$$

$$t = -\frac{\tau}{2\pi} + (n\pi - 1.088)$$

$$t = -0.18 \cdot \tau + \frac{n\tau}{2}$$

Parçacığın ilk olarak dönme noktasından geçeceği zaman,

$$t = -0.18 \cdot \tau + \frac{\tau}{2} \approx 0.13s$$

Olur. $t = 0.13s$ değerini hareket denkleminde yerine yazarsak, buna karşılık gelen konumun $x = -0.216m$ olduğunu buluruz. (yukarıda $x \pm 0.216m$ olduğunu biliyoruz).

Dönme noktasında, $v = 0$ dır. Böylece kinetik enerji

$$K = \frac{1}{2} m(0)^2 = 0$$

Olur. Bundan dolayı, toplam enerji sadece potansiyel enerjiden ibarettir.

$$U = E \approx 17.2J$$

Ve $x = -0.216m$ noktasında ivme,

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \qquad \Rightarrow \qquad a = 53.2\, m/s^2$$

Şeklinde elde edilir.

<u>Problem 4.6</u> (Ohanian, sayfa 406, problem 11)

Yaylar ve ağırlık sayfa 386 daki 2. Örnekte tartışılmıştır. O örnekteki asıl önemli olan nokta ağırlığın sadece yayın denge konumunu aşağıya çekmesidir. Hareket hala aynı frekanslı basit harmonik harekettir. Denge noktası aşağıya doğru

$$\Delta x = \frac{mg}{k} \approx 0.27m$$

Kadar hareket eder.

Yani, aslında yayı gerilmemiş konumda tutmak, onu denge konumundan Δx kadar bir yer değiştirme kadar yukarıda tutmaktır. Bu noktada, hareketi tanımlama problem 4.5 (a) daki duruma oldukça benzerdir. Dik doğrultuyu x olarak belirleyelim ve aşağı yönü x' in artan yönü olarak tanımayalım ve $x = 0$ noktasını yeni denge noktası olarak seçelim. İlk hız sıfırdır. Böylece δ = 0 dır. İlk yerdeğiştirme $-\Delta x$ tir. Böylece hareket

$$x = -\frac{mg}{k}\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) = \_-0.27m \ \mathrm{x} \cos(6rad/st)$$

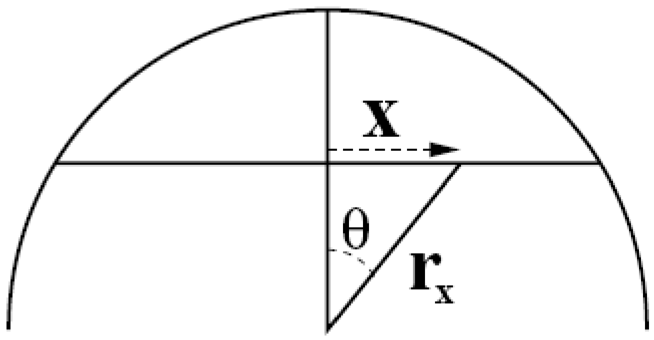
Şeklinde olacaktır. Farklı bir şekilde seçim yapma, farklı değerler elde etmenize sebep olacaktır, fakat hareketin şekli aynıdır.

Problem 4.7 (Ohanian, sayfa 410, problem 43)

(a) Şekli inceleyerek, tünelin merkezinden olan mesafe olan x ile gezegenin merkezine olan r_x arasında

$$x = r_x \sin\theta$$

Şeklinde bir ilişki söz konusudur.



Sayfa 232 deki (45) nolu eşitlik yardımıyla, ağırlıktan dolayı olan ivme

$$g = \left(\frac{GM}{R^3}\right) r_x$$

Şeklinde verilir. Çekim ivmesinin tünel boyunca olan bileşeni

$$g_x = -g\sin(\theta) = -\ g = \left(\frac{GM}{R^3}\right) r_x \sin(\theta) = -\left(\frac{GM}{R^3}\right) x$$

İle verilir.

(b) Newton'un ikinci kanunu hareket için aşağıdaki eşitliği verir.

$$\alpha = g_x = -\left(\frac{GM}{R^3}\right) x$$

Bu eşitlik

$$\ddot{x} = -\,\omega^2 x$$

Şeklindedir. Ve açısal hızının

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

İle verildiği

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

Şeklinde çözüme sahiptir. Bu durumda periyot

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

İle verilir.

(c) Tren San Fransisco' dan harekete durgun olarak başladığı için, hareketin genliği tünelin uzunluğunun yarısıdır. Bundan dolayı San Francisco'dan Washington D.C. ye varma zamanı

$$\Delta x = \frac{\tau}{2} = \pi\sqrt{\left(\frac{R^3}{GM}\right)} \approx 2550s$$

Şeklinde olacaktır. Tünelin uzunluğu, *l*, sayfa 18 deki örnek 5 de bulunmuştur. Bu durumda hareketin genliği,

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2} = \frac{3.8\,\mathrm{x}10^3}{2}\,\mathrm{km} = 1.9\,\mathrm{x}10^3\ \mathrm{km}$$

Şeklindedir. Bu durumda hareket,

$$x = A\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad v = -\omega A\sin(\omega t)$$

Şeklinde verilir. Eğer trenim tünelin ortasına varması $t = \frac{\tau}{4}$ kadar zaman alırsa, Bu durumda maksimum hız,

$$|v| = \omega A\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}.\frac{\tau}{4}\right) = \omega A\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \omega A = \frac{2\pi A}{\tau} = \frac{2\pi x1.9x10^3 km}{5100s} \approx 2.3km/s$$

Olarak elde edilir.

Problem 4.8

$l = 2$ m, $m = 3$ kg ve $g = 10 \quad m/s^2$ olsun. Sarkacın tabanından olan dikey yüksekliği ölçeceğiz. θ, ipin dikeyle yapmış olduğu açı olsun. Eğer şekli çizerseniz, salıncağın alt ucundaki kütlenin en alt noktaya göre yüksekliği θ nın fonksiyonu olarak,

$h = l(1 - \cos\theta)$

İle verilir. (daha güzel olarak çizilmiş şekil için, lütfen daha sayfa 391 deki şekil 15.16 ya bakınız). Bundan dolayı, θ' nın fonksiyonu olarak potansiyel enerji

$$U = mgh = mgl\,(1\text{-}\cos\theta)$$

Şeklindedir. Böyle bir sarkaç için toplam enerji korunur. (Gerilme kuvveti, daima harekete diktir, yani, iş yapmaz, bundan dolayı enerji korunumludur. Bu da sayfa 392 de gösterilmiştir.) Sarkaca bağlı olan kütle, dikeyle $\theta = 30^\circ$ yaptığı zaman durgun andan serbest bırakılıyor. Bundan dolayı başlangıçtaki toplam enerji sadece kinetik enerjiden ibarettir. Ve

$$E = mgl(1 - \cos 30^\circ) \approx 8.038\,\text{J}$$

Şeklinde verilir.

(a) Sarkacın en alt ucunda, enerji sadece kinetik enerjiden ibarettir, ve

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad |v| = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{2gl(1 - \cos 30^\circ)} \approx 2.3 m/s$$

Olarak elde edilir.

(b) Sarkacın dikeyle $\theta = 10^\circ$ yapmış olduğu durumu düşünelim. Bu durumda enerji

$$E = mgl(1 - \cos 10^\circ) + K \quad \Rightarrow \quad K = mgl(\cos 10^\circ - \cos 30^\circ) \approx 7.13 J$$

Olur.

(c) (a) şıkkı için cevap m kütlesinden bağımsızdır. Bundan dolayı en alt noktadaki hızın büyüklüğü eğer kütle iki katına çıkarılırsa değişmeyecektir. (b) şıkkı için cevap m kütlesi ile lineer olarak artmaktadır. Bundan dolayı en alt noktadaki hızın büyüklüğü eğer kütle iki katına çıkarılırsa iki katına çıkacaktır.

Problem 4.9 (Ohanian, sayfa 178, problem 8)

Parçacık P_1 konumundan P_2 konumuna hareket ettiği zaman onun üzerine yapılan iş,

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F dx$$

ile verilir. Bu problem için, Dört bölgenin integralini toplayarak elde edebiliriz. Bu bölgeler, şu şekilde tanımlanır.

(1) $0 \le x \le 2$, (2) $2 \le x \le 4$, (3) $4 \le x \le 6$, (4) $6 \le x \le 8$

(1). Bölgede konumun fonksiyonu olarak kuvvet

$$F_x = \left(\frac{2N - 0N}{2m - 0m} \right) x = (1N/m)x$$

Şeklindedir.

(2). Bölgede konumun fonksiyonu olarak kuvvet

$$\mathrm{F_x} = 2\mathrm{N}$$

(3). Ve (4). Bölgede konumun fonksiyonu olarak kuvvet

$$\mathrm{F_x} = \left(\frac{-2\mathrm{N} - 2\mathrm{N}}{8\mathrm{m} - 4\mathrm{m}} \right) \mathrm{x} + 2\mathrm{N} = (-1\mathrm{N/m})\mathrm{x} + 2\mathrm{N}$$

Şeklindedir. Böylece yapılan iş,

$$W = \int_0^2 F dx + \int_2^4 F dx + \int_4^6 F dx + \int_6^8 F dx$$

Şeklinde elde edilir. Genel integral kurallarını ve yukarıda yazılan $\mathrm{F_x}$ fonksiyonlarını kullanarak, bu integralin değerini elde edebiliriz. ($\mathrm{y} = 0$ çizgisinin altındaki alanın negatif olarak alındığını hatırlayın.) Böylece iş,

$$W = \underbrace{\frac{1}{2} x 2N x 2m}_{0 \le x \le 2} + \underbrace{2N x 2m}_{2 \le x \le 4} + \underbrace{\frac{1}{2} x 2N x 2m}_{4 \le x \le 6} - \underbrace{\frac{1}{2} x 2N x 2m}_{6 \le x \le 8} = 6 \text{ J}$$

Olarak elde edilir.

<u>Problem 4.10</u> (Ohanian, sayfa 178, problem 10)

Adam, kutuyu sabit hız ile itmektedir. Böylece, onun itme kuvveti, kutu üzerine etki eden bütün kuvvetlerin toplamına tam olarak eşit olmalıdır. Etki eden çeşitli kuvvetler

$$N = mg\cos 30^\circ$$

$$F = \mu mg\cos 30^\circ$$

$$F = mg(\mu\cos 30^\circ + \sin 30^\circ) \approx 520N$$

Şeklinde verilmektedir. Burada F, adamın kutu üzerine uygulamış olduğu kuvvettir. m=60kg ve $\mu = 0{,}45$ tir. (Diğer iki kuvvetler ise, normal kuvvet N , ve sürtünme kuvveti $\mathcal{F}$ tir.) Fakat kutuyu 2.5 m yukarıya kaldırması için, eğik düzlem boyunca

$$l = \frac{2.5m}{\sin 30^\circ} = 5m$$

Hareket ettirmelidir. Bütün mesafe boyunca sabit kuvvet uygulamaktadır. Böylece, yaptığı iş aşağıdaki kadardır.

$$W = Fl \approx 2.6x10^3 \text{ J}$$

<u>Problem 4.11</u> (Ohanian, sayfa 182, problem 52)

Eğer sürtünmeyi ihmal edersek, lunapark hız treni üzerine daima aşağı doğru olan çekim kuvveti ve rayların tren üzerine etki ettirdiği normal kuvveti olmak üzere sadece iki kuvvet söz konusudur. Normal kuvvet arabanın raya dik olan bileşenini yok eder. Eğer hız treninin hızı oldukça küçük ise, normal kuvvet yok olacak ve hız treni raylardan ayrılacaktır. Şimdi normal kuvvetin henüz yok olduğu durumu düşünüyoruz.

Döngünün üstü bir dairesel yaydır; çekim kuvveti aşağıya doğrudur. Çekim kuvveti ivmenin kaynağı olmalıdır. Yani,

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = g \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{rg}$$

Şeklindedir. R yarıçapı için, kritik hız aşağıdaki gibidir.

$$v_{cr} = \sqrt{Rg} \approx 9.9m/s$$

Eğer hız, v_{cr} kritik hız değerinden küçük ise, bu durumda lunapark hız treni, raydan çıkacaktır. Eğer hız v_{cr} kritik hız değerinden büyük ise, bu durumda lunapark hız treni rayların üzerinde kalacak ve en yüksek noktada aşağı yönlü bir normal kuvveti olacaktır.

En alt noktadaki minimum hız enerjinin korunumundan den elde edilir. Eğer döngünün tabanına göre yüksekliği ölçersek, bu durumda döngünün en üst nokrasındaki enerji

$$E = \frac{mv^2{}_{top}}{2} = mgh$$

Şeklinde yazılır. Burada $h = 40m$ yüksekliği döngünün en üst noktasını yüksekliğidir ve v_{top} döngünün en üst noktasındaki hızdır. Döngünün en alt noktasındaki enerji,

$$E = \frac{m_b^2}{2}$$

İle verilir. Burada v_b döngünün en alt noktasındaki hızdır. Böylece enerjinin korunumu,

$$v_b \geq \sqrt{v_{top}^2 + 2gh} \approx 29.7 m/s$$

Şeklinde bir hız değeri verir.

Problem 4.12

$m = 3.0kg$, $\mu_s = 0.30$, $\mu_k = 0,20$ ve $k = 80N/m$ olsun.

(a) İki tane düşey kuvvet vardır. Ağırlık (mg) ve masa tarafından uygulanan normal kuvvet (N). Bu iki kuvvet birbirine eşit olmalıdır.

$$N = mg$$

İki adet yatay kuvvet söz konusudur. Masa tarafından uygulanan sürtünme kuvveti ($\mathcal{F}$) ve yayın çekme kuvveti(F_S). Sürtünmenin tabiatından dolayı, bu iki kuvvet zıt yönlerde olacaktır. Eğer blok durgun olarak kalmaya devam ederse, bu durumda bu iki kuvvet eşit olmalıdır.

$$F_S = \mathcal{F}$$

Eğer kuvvetler birbirini dengeliyorsa, bu durumda herhangi bir ivme söz konusu değildir. Eğer hiçbir hareket yok ise, Bu durumda sürtünme kuvveti statiktir. Ve böylece

$$|\mathcal{F}| \leq \mu_s mg \qquad \Rightarrow \qquad |F_s| \leq \mu_s mg$$

Yayın çekme kuvveti yayın x uzaması ile orantılıdır. Böylece

$$|F_s| = k|x| \qquad \Rightarrow \qquad |x| \leq \frac{\mu_s mg}{k}$$

Olur ve bloğun durgun olarak kalması için gerekli olan maksimum uzama

$$x_{max} = \frac{\mu_{smg}}{k} \approx 0.11m$$

Şeklinde olur.

(b) Çok hafif bir şekilde itme, sürtünmeyi kinetik yapacaktır, statik değil. Bu maksimum uzamada, kinetik sürtünme bloğu durgun olarak tutamayacaktır. (statik sürtünme bloğu zor bela durgun olarak tutmaktadır. Ve kinetik sürtünme statik sürtünmeden daha azdır.) Böylece, blok denge noktasına doğru hareket etmeye başlayacaktır. Yay kuvveti, bloğun hızını artıracaktır. Fakat eninde sonunda sürtünme bloğu durduracaktır. Böylece bir maksimum hızın olacağı açıktır.

Cisim, yay kuvvetinin büyüklüğü, F_s, sürtünme kuvvetinin büyüklüğünden daha büyük olduğu için ilk olarak ivmelenecektir. İvmelenme, bu iki kuvvetin büyüklüğü eşit olana kadar devam edecektir. Bundan sonra, sürtünme kuvveti büyüklük olarak yay kuvvetinden daha büyük olacaktır. Ve böylece hız azalacaktır. Bundan dolayı, bu iki kuvvet eşit olduğu anda maksimum hıza ulaşılır (bu durumda ivme sıfırdır). Böylece

$$\mu_k mg = kx \qquad \Rightarrow \qquad x \approx 0.074m$$

Olur.

Problem 4.13

Bu sarkaç, çiviye değene kadar diğer sarkaçlar gibi davranacaktır. Özelikle sarkaçın ucundaki kütle, ilk hızsız bırakılmıştır. Böylece hareketin ilk aşaması (çiviye değene kadar) problem 4.8 de anlatılan durum ile aynı olacaktır. Orada potansiyel enerjinin

$$U = mgl(1 - \cos\theta)$$

Olduğu gösterilmişti. Burada *l,* m ve θ oradaki aynı şeyleri ifade etmektedir. Kütlenin çiviye çarpmadan hemen önceki hızını bulmak için enerjinin korunumunu kullanabiliriz. θ_0 da toplam enerji sadece potansiyel enerjiden ibarettir ve

$$E = Umgl(1 - \cos\theta_0)$$

Şeklindedir. Şimdi ip çiviye çarpmaktadır. İpin kütlesinin olmadığını varsayıyoruz. Böylece hiçbir enerji taşımamaktadır. Bu durumda kütle çarpmadan hemen önce bütün enerjiyi muhafaza edecektir. Şimdi sistem sanki çiviye tutturulmuş bir sarkaç gibi davranacaktır. Serbest ipin uzunluğu,

$$l' = l - L$$

Şeklindedir. Sarkacın ucundaki kütle, enerjinin korunumu onun daha fazla salınım yapmasını önleyene kadar salınacaktır. Bu maksimum açıda, enerji sadece potansiyel enerjiden ibarettir. Bu durum başladığımız andaki durum ile özdeştir. Enerji

$$E = U = mgl'(1-\cos\alpha) = mg(l-L)(1-\cos\theta)$$

Şeklinde verilir. Enerjinin korunumu her iki enerjinin aynı olduğunu söyler. Böylece,

$$E = mg(l-L)(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = 1 - \frac{E}{mg(l-L)}$$

Yukarıda verilen enerjiyi kullanarak α için

$$\cos\alpha = \frac{l\cos\theta_0 - L}{(l-L)}$$

İfadesini verir.

(Burada dikkatli olmalıyız. Eğer $|\theta_0|$ oldukça büyük ise, bu durumda kütle, çivi etrafında bir tam döngüyü tamamlayacak ve yukarıdaki sonucumuz yanlış olacaktır. Böyle bir sorun, yukarıdaki eşitliğin $\cos\alpha < -1$ olduğunu verdiği zaman meydana gelir.)

(b) Eğer kütle, belli bir teğet hız ile bırakılırsa, yukarıdaki anlatılan kısımda değişecek olan tek şey yukarıdaki enerji hesaplamalarında şimdi kinetik enerjinin de yer alması olacaktır. Böylece α için

$$\cos\alpha = 1 - \frac{E}{mg(l-L)}$$

İfadesi değişmeyecektir. Fakat E nin değeri

$$E = mgl(1-\cos\theta_0) + \frac{mv_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{l\cos\theta_0 - L}{l-L} - \frac{v_0^2}{2g(l-L)}$$

Olacaktır. (Burada dikkatli olmalıyız. Eğer $|v_0|$ çok büyük ise ya da eğer $|\theta_0|$ çok büyük ise, bu durumda kütle, çivi etrafında bir tam döngüyü tamamlayacak ve yukarıdaki sonucumuz yanlış olacaktır. Böyle bir sorun, yukarıdaki eşitliğin $\cos\alpha < -1$ olduğunu verdiği zaman meydana gelir.)

α nın v_0 a bağımlılığı ikinci derceden bir denklemdir. Yani v_0 ın işareti önemli değildir. Fiziksel olarak hareket için üç farklı durum söz konusudur.

(1) Kütle hemen çiviye doğru hareket eder, çiviye çarpar ve daha sonra maksimum α açısına ulaşır.

(2) Kütle ilk olarak çividen uzaklaşır, v_0 ın değeri o kadar büyüktür ki, kütle bir tam tur döner ve kütle çiviye diğer taraftan çarpar ve daha sonra maksimum α açısına ulaşır.

(3) Kütle ilk olarak çividen uzaklaşır, v_0 ın değeri kütle bir tam tur dönecek kadar büyük değildir. Ve bir noktada kütle (1) nolu durumda olduğu gibi çiviye doğru salınacaktır, çiviye çarpar ve daha donra maksimum α açısına ulaşır.

((2) ve (3) arasına denk gelen bir durum daha vardır. Burada kütle kısmen bir tur dönecek ve bunu yaparken bir noktada aşağıya doğru düşecektir. Eğer çarpma esnasında kaybolan enerjiyi ihmal edersek, bu durumda, hatta bu durum bile, α maksimum açısına salınacaktır.)

Problem 4.14 (Ohanian, sayfa 182, problem 52)

(a) Başlangıçta, valiz durgundur. Ve taşıma bandı hareket etmektedir. Böylece birbirine göre bağıl hareket söz konusudur ve sürtünme kinetiktir.

(b) Sürtünme daima bağıl harekete göre ters yönlüdür. Fakat referans çerçevesine bağlıdır. Sürtünme bu çerçevedeki hareket ile aynı hizada olabilirde olmayabilirde. Bunu açıkça görebilmek için, bu soruyu cevaplayabilmek için, iki referans çerçevesi kullanacağız.

İlk olarak taşıma bandı açısından duruma baktığımızı düşünelim. Valiz sola doğru hareket etmektedir. Ve taşıma bandı durgundur. Valiz taşıma bandı üzerinde fren yapacak ve üzerinde durana kadar patinaj yapacaktır. Patinaja sebep olan sürtünmenin yönü ve hareketin yönü birbirine terstir. Açıkça sürtünme negatif iş yapmıştır. Başlangıçta kinetik enerji var idi fakat sonunda kalmadı.

Şimdi de taşıma bandı kenarında ayakta duran bir kişi açısından duruma baktığımızı düşünelim. Valiz başlangıçta durgun ve taşıma bandı sağa doğru hareket ediyor. Valiz taşıma bandının üzerine konuyor ve sağa doğru, hızı taşıma bandının hızına eşit olana kadar ivmelenmektedir. İvmelenmeye sebp olan sürtünmenin yönü ve hareketin yönü aynıdır. Açıkça sürtünme pozitif iş yapmıştır. Başlangıçta kinetik enerji yok idi sonunda sıfır olmayan söz konusudur.

Sonuç olarak iş referans çerçevesine bağlı olan bir niceliktir.

(c) Büyük bir ihtimalle taşıma bandı sabit hız ile hareket etmektedir. Eğer valiz taşıma bandının hızına ulaşırsa, bu durumda valizde sabit hıza sahip olacaktır. Bu durumda net yatay kuvvet sıfır olmalıdır. Eğer taşıma bandı ve valiz aynı hıza sahipler ise, bu durumda birbirlerine göre bağıl hızları söz konusu değildir. Ve bağıl hareket oluşturmak için herhangi bir teşebbüs te söz konusu değildir. Bundan dolayı, sürtünme yoktur.